

Il problema dei problemi



Pietro Di Martino



Dipartimento di Matematica- Università di Pisa

Warm up

Attività di riscaldamento

Con quale obiettivo insegnate (o insegnare) matematica?

Far vedere che la matematica è ovunque

Insegnare a far di conto

Appassionare

Insegnare a risolvere problemi (problem solving)

Rendere elastica la mente

Argomentare

Insegnare un particolare tipo di ragionamento

Quanto raggiungiamo questi obiettivi?

E chiediamo ai bambini di risolvere problemi, di capire, ragionare e argomentare in matematica?

E almeno di decidere qualcosa?

E valutiamo questi elementi?

VALUTARE

Nel senso di “dare valore”

Dizionario
etimologico online

valutare dall'*ant.* VALUTO | = *lat.* *vàlitus* | per *valso* | che dal suo canto è contratto dell'*ant.* *valsùto* | participio passato di VALÈRE *aver prezzo* (v. *Valere*).

Dare il prezzo, Stimare; *fig.* Avere in considerazione. — « Valutare alcuna cosa in conto altrui » = Tenergliene conto, in proporzione del valore che si stima.

Deriv. *Valutàbile*; *Valutazione*.

“L'attività di valutazione nella scuola dell'infanzia risponde ad una funzione di carattere formativo, che riconosce, accompagna, descrive e documenta i processi di crescita, evita di classificare e giudicare le prestazioni dei bambini, perché è orientata a esplorare e incoraggiare lo sviluppo di tutte le loro potenzialità”

GUAI se non fosse così in tutta la scuola del primo ciclo!

VALUTARE

Nel senso di “dare valore”

Dizionario
etimologico online

valutare dall'*ant.* VALUTO | = *lat.* *vàlitus* | per *valso* | che dal suo canto è contratto dell'*ant.* *valsùto* | participio passato di VALÈRE *aver prezzo* (v. *Valere*).

Dare il prezzo, Stimare; *fig.* Avere in considerazione. — « Valutare alcuna cosa in conto altrui » = Tenergliene conto, in proporzione del valore che si stima.

Deriv. *Valutàbile*; *Valutazione*.



Importanza di riflettere su obiettivi, giudicare coerenza di ciò che si fa e valutare risultati

Valutare e riflettere sui motivi della distanza tra questi due curriculum (vincoli, idee)

Intended Curriculum

• **Curricolo intenzionale, ispirato dalle Indicazioni**

Valutare la distanza tra questi due curriculum ci dice qualcosa sull'efficacia delle scelte didattiche

Implemented Curriculum

• **Curricolo realizzato**

Attained Curriculum

• **Curricolo appreso**

Antinomia dell' insegnante

“È una contraddizione profonda, quasi un' **antinomia**: Riesco ad insegnare qualcosa *soltanto* a quelli che imparerebbero anche da soli. E non riesco ad incidere su quelli che *veramente* avrebbero bisogno di me”

Difficoltà in matematica - R. Zan
Springer Italia, 2007



PARTE I

Il problem solving e
l'argomentazione come
competenze chiave
dell'educazione matematica
anche nelle Indicazioni
Nazionali

Problem solving e argomentazione

Usualmente chi prova si accorge di una certa “potenzialità”...

*Mi avete convinta con questa storia dell'argomentazione, che è importante. Sperimentando le attività nella pratica **ho visto che escono fuori cose belle, che i bambini chiedono di fare ancora questi problemi...***

Però...

*Però, l'anno prossimo avrò le prime...a volte guardo in mensa le prime di quest'anno, vedo come si comportano...e allora penso che non so se riuscirò a fare anche queste attività, magari non avrò il tempo di fare nemmeno **quello che devo...***

*Mi avete convinta con questa storia dell'argomentazione, che è importante. Sperimentando le attività nella pratica **ho visto che escono fuori cose belle, che i bambini chiedono di fare ancora questi problemi...***

Però...

*Però, l'anno prossimo avrò le prime...a volte guardo in mensa le prime di quest'anno, vedo come si comportano...e allora penso che non so se riuscirò a fare anche queste attività, magari non avrò il tempo di fare nemmeno **quello che devo...***

Ma cosa è “quello che dobbiamo”?

I contenuti? Gli esercizi? Alcune attività in particolare?

Forse val la pena dare un'occhiata a cosa richiedono le Indicazioni Nazionali...



*Ministero dell'Istruzione,
dell'Università e della Ricerca*

Indicazioni nazionali per il curricolo



PRIMARIA

Matematica

Riesce a risolvere facili problemi in tutti gli ambiti di contenuto, mantenendo il controllo sia sul processo risolutivo, sia sui risultati

INFANZIA

Dalla scuola dell'infanzia alla scuola primaria

Manifesta curiosità e voglia di sperimentare (...) Rileva le caratteristiche principali di eventi, oggetti, situazioni, formula ipotesi, ricerca soluzioni a situazioni problematiche di vita quotidiana

MEDIA

Riconosce e risolve problemi in contesti diversi valutando le informazioni e la loro coerenza (...) Confronta procedimenti diversi e produce formalizzazioni che gli consentono di passare da un problema specifico a una classe di problemi





PRIMO CICLO

PRIMARIA

Matematica

INFANZIA

Il sé e l'altro

Il bambino gioca in modo costruttivo e creativo con gli altri, sa argomentare, confrontarsi, sostenere le proprie ragioni con adulti e bambini (...)
Riflette, si confronta, discute con gli adulti e con gli altri bambini e comincia a riconoscere la reciprocità di attenzione tra chi parla e chi ascolta

Descrive il procedimento seguito e riconosce strategie di soluzione diverse dalla propria.
Costruisce ragionamenti formulando ipotesi, sostenendo le proprie idee e confrontandosi con il punto di vista di altri



PRIMO CICLO

INFANZIA

Il sé e l'altro

MEDIA

Il bambino gioca in modo costruttivo e creativo con gli altri, sa argomentare, confrontarsi, sostenere le proprie ragioni con adulti e bambini (...)
Riflette, si confronta, discute con gli adulti e con gli altri bambini e comincia a riconoscere la reciprocità di attenzione tra chi parla e chi ascolta

Spiega il procedimento seguito, anche in forma scritta, mantenendo il controllo sia sul processo risolutivo, sia sui risultati (...) Produce argomentazioni in base alle conoscenze teoriche acquisite (ad esempio sa utilizzare i concetti di proprietà caratterizzante e di definizione). Sostiene le proprie convinzioni, portando esempi e controesempi adeguati e utilizzando concatenazioni di affermazioni; accetta di cambiare opinione riconoscendo le conseguenze logiche di una argomentazione corretta

Lavorare sull'argomentazione e le competenze linguistiche: perché?
Scuola dell'infanzia – Scuola primaria – Scuola media



Il CASO della matematica

PROBLEM SOLVING
ARGOMENTAZIONE



INFANZIA

PRIMO CICLO

Obiettivi di apprendimento terza secondaria di primo grado -
ITALIANO Ascolto e parlato

Argomentare la propria tesi su un tema affrontato nello studio e
nel dialogo in classe con **dati pertinenti e motivazioni valide**

Traguardi per competenza

Adatta opportunamente i registri informale e formale in base alla
situazione comunicativa e agli interlocutori, realizzando scelte
lessicali adeguate

Lavorare sull'argomentazione e le competenze linguistiche: perché?

Scuola dell'infanzia – Scuola primaria – Scuola media

La matematica (...) contribuisce a sviluppare la capacità di comunicare e discutere, di argomentare in modo corretto, di comprendere i punti di vista e le argomentazioni degli altri

Obiettivi di apprendimento terza secondaria di primo grado -

ITALIANO

Ascolto e parlato

Argomentare la propria tesi su un tema affrontato nello studio e nel dialogo in classe con dati pertinenti e motivazioni valide

Come distinguere la pertinenza di un dato e la validità di un'affermazione? La matematica dovrebbe proprio insegnare a controllare e accorgersi quando "si esce dalle regole del gioco"! E infatti, nelle Indicazioni...

Competenze in continuità

INFANZIA

PRIMO CICLO

SECONDO CICLO

LICEI

PROBLEM SOLVING

ARGOMENTAZIONE

DIMOSTRAZIONE

“Nella scuola del primo ciclo i traguardi costituiscono criteri per la valutazione delle competenze attese e, nella loro scansione temporale, sono prescrittivi, impegnando così le istituzioni scolastiche affinché ogni alunno possa conseguirli, a garanzia dell'unità del sistema nazionale e della qualità del servizio. Le scuole hanno la libertà e la responsabilità di organizzarsi e di scegliere l'itinerario più opportuno per consentire agli studenti il miglior conseguimento dei risultati”

Competenze in continuità

INFANZIA

PRIMO CICLO

SECONDO CICLO

LICEI

PROBLEM SOLVING

ARGOMENTAZIONE

DIMOSTRAZIONE

“Nella scuola del primo ciclo i traguardi costituiscono criteri per la valutazione delle competenze attese e nella loro esecuzione

La promozione di competenze argomentative è dunque una parte significativa di “quello che dobbiamo” fare, non si tratta di attività opzionali (*“le faccio magari a maggio dopo le prove INVALSI...”*)

scegliere il percorso più opportuno per consentire agli studenti il miglior conseguimento dei risultati”

Verticalità

La conoscenza del mondo

I bambini esplorano continuamente la realtà e **imparano a riflettere sulle proprie esperienze descrivendole, rappresentandole, riorganizzandole con diversi criteri. Pongono così le basi per la successiva elaborazione di concetti scientifici e matematici che verranno proposti nella scuola primaria**

Ma si può davvero cominciare a lavorare su questi aspetti fin dall'infanzia?



Osservazione 2

Importanza di partire dall'esperienza, ma per andare oltre alla stessa

Non solo si può...

È molto importante, a tutti i livelli scolari, e per molti dei contenuti che proponiamo, prima di introdurli, ascoltare la voce dei bambini, per avere una idea delle *conoscenze* pregresse (e lavorare a partire da quelle) e per dare ai bambini l'occasione di raccontare i loro saperi

Verticalità

Considerazione dei loro saperi

Competenza

Abituare a raccontare quel che si sa e confrontarsi con gli altri

Necessità

Ascoltare veramente

Trovare le giuste domande/attività

Argomentare all'infanzia

"Le strategie di cui dicevamo mirano ad attivare un processo di estraniamento del bambino dal contesto abituale per far vivere il problema e, per questo motivo, vengono proposte situazioni che siano modelli del reale da costruire in contesti opportuni variabili di volta in volta"



Infanzia e matematica
Pitagora Editrice
Bologna

"È proprio in questa accezione che sono stati proposti a bambini dell'ultimo anno della scuola dell'infanzia alcuni 'problemi stimolo' che miravano a far emergere quelle consapevolezze che in altri modo non erano palesate, creando situazioni semplici e dominabili da mettere in grado un bambino di 5 o 6 anni, di dare indicazioni sul procedimento"

Argomentare all'infanzia

Esempio: Fai finta di essere un gelataio. Un bambino piccolo ti chiede un gelato che costa 21 centesimi. Ti dà 12 centesimi e alle tue obiezioni risponde dicendo che nei numeri 21 e 12 c'è un 1 e c'è un 2 e quindi è uguale. Cosa fai per convincerlo ed avere i tuoi soldi?

"Viene alzato un sipario immaginario ed il bambino diventa regista e protagonista di una storia quasi reale" (6 anni)

G: Hei, bambino! Non mi hai dato i soldi giusti!

B: Ma io sono piccolo, non lo so! Me li ha dati la mamma.

G: Allora devi dire a tua mamma che così non va bene, perché il gelato non costa così.

B: Sì, ma allora tu cosa vuoi?

G: Devi dire a tua mamma che il gelato costa 21 centesimi e non 12! E poi le devi dire che 21 non è come 12. Guarda, lo vedi il cartellino del prezzo? Qui c'è scritto che costa 21 centesimi! E allora devi dire a tua mamma che...guarda!

Argomentare all'infanzia

G: Per fare 21 centesimi [prende le monete] devi prendere 2 monete da 10, ma per fare 12 di monete da 10 ne basta 1! Io voglio 2 monete da 10 e 1 moneta da 1, no 2 monete da 1 e 1 da 10.

B: Ma io le monete da 10 te le ho date e anche da 1!

G: Sì, ma me le hai date al contrario e così mi hai dato meno soldi. Guarda! [prende un foglio di carta e scrive] Tu mi hai dato 12 e io voglio 21, Se 2 sta davanti, così [scrive di nuovo 21] allora vuol dire che il gelato costa di più che se stava davanti 1 così [scrive di nuovo 12]

B: Sì, va beh! Adesso glielo dico a mia mamma tutto quello che vuoi tu, ma io voglio un altro gelato perché questo mi si è sciolto!

Obiettivi in verticale

Esempio 1: ascolto attivo

Una competenza trasversale

La scuola del primo ciclo

L'ambiente di apprendimento

*“Favorire l’esplorazione e la scoperta, al fine di promuovere il gusto per la ricerca di nuove conoscenze. **In questa prospettiva, la problematizzazione svolge una funzione insostituibile:** sollecita gli alunni a individuare problemi, a sollevare domande, a mettere in discussione le conoscenze già elaborate, a trovare appropriate piste d’indagine, a cercare soluzioni originali.”*

Competenze inseguite da tempo...

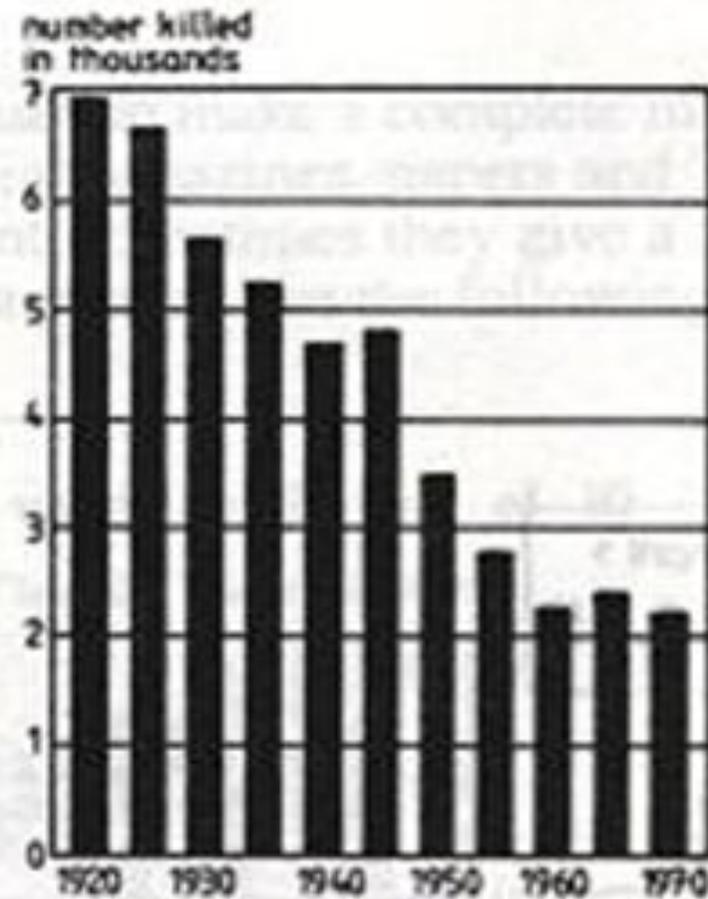
Il legame con l'obiettivo di educare alla cittadinanza attiva

“la scuola deve garantire a chi la frequenta (...) l'assimilazione e lo sviluppo della capacità di comprendere, costruire, criticare argomentazioni e discorsi, per dare significato alle proprie esperienze e anche difendersi da messaggi talvolta truccati in termini di verità e di valore”

M.P.I. i contenuti essenziali per la formazione di base, 1998

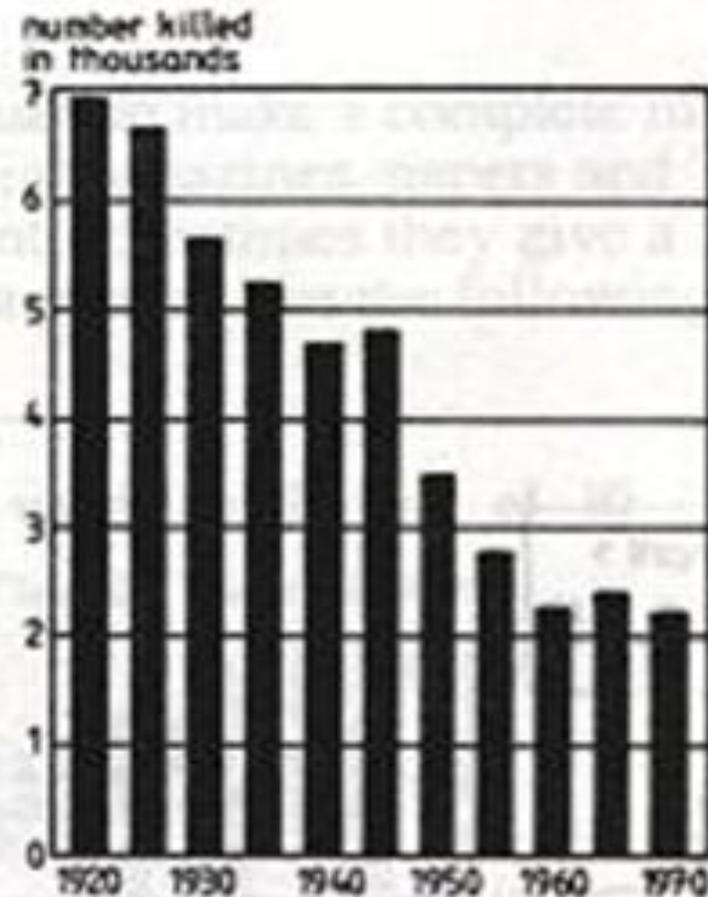
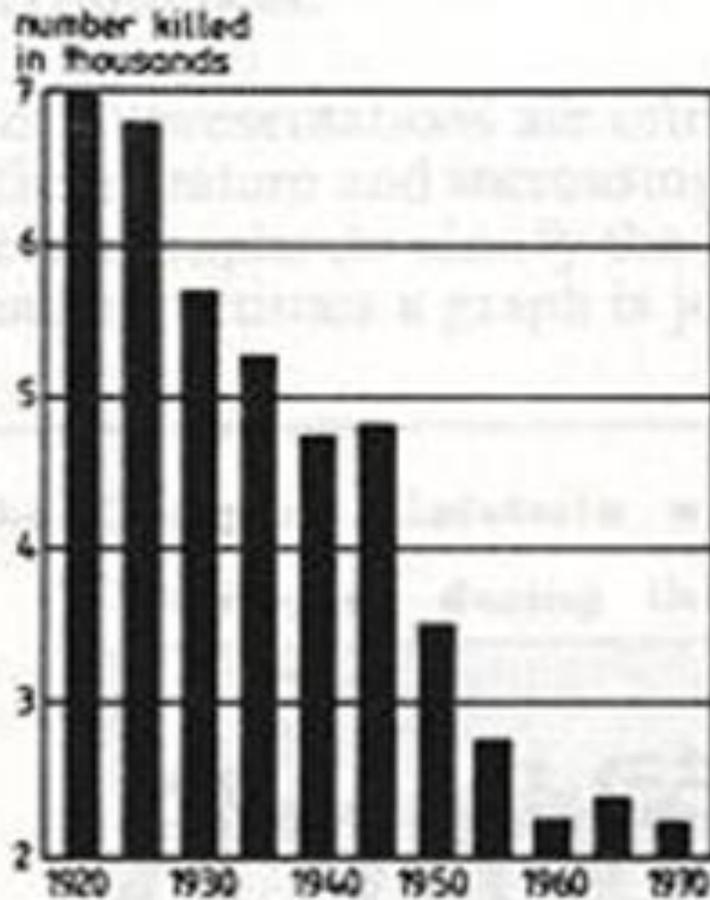
Incidenti ferroviari

Esempi tratti dal sito di
Domingo Paola



Railway accidents in the United States

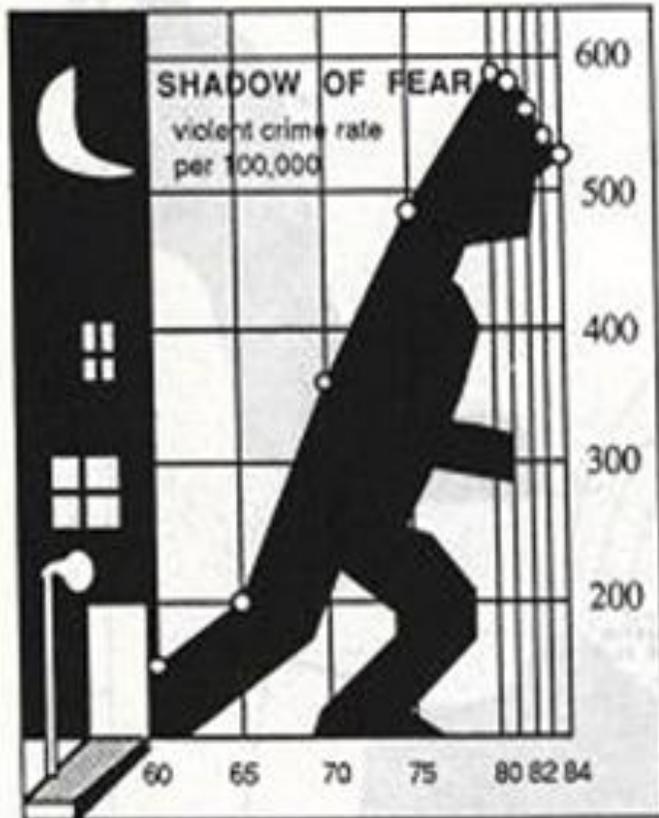
Incidenti ferroviari



Railway accidents in the United States

Furti in casa

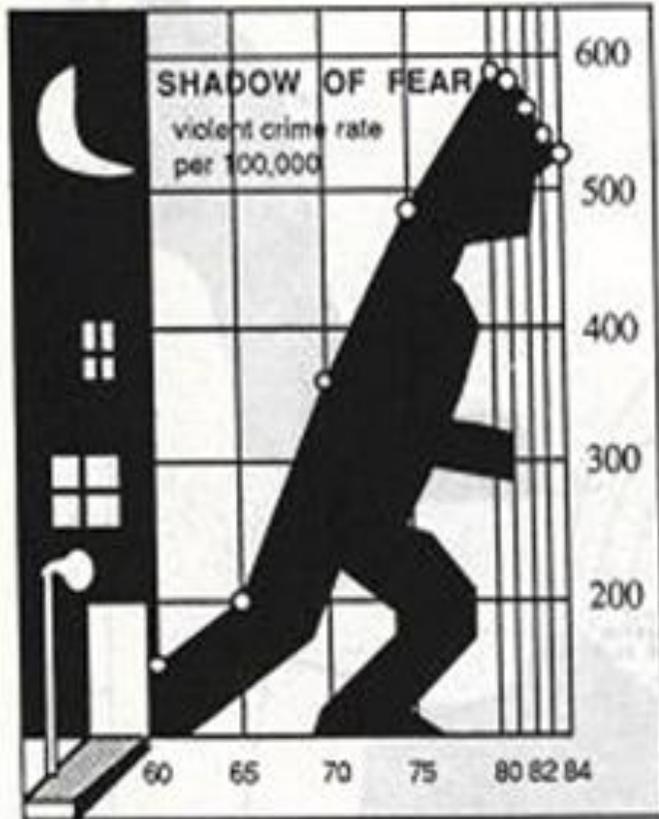
Newsweek:



It shows the number of reported crimes per 100,000 inhabitants, initially every five years, later on per year.

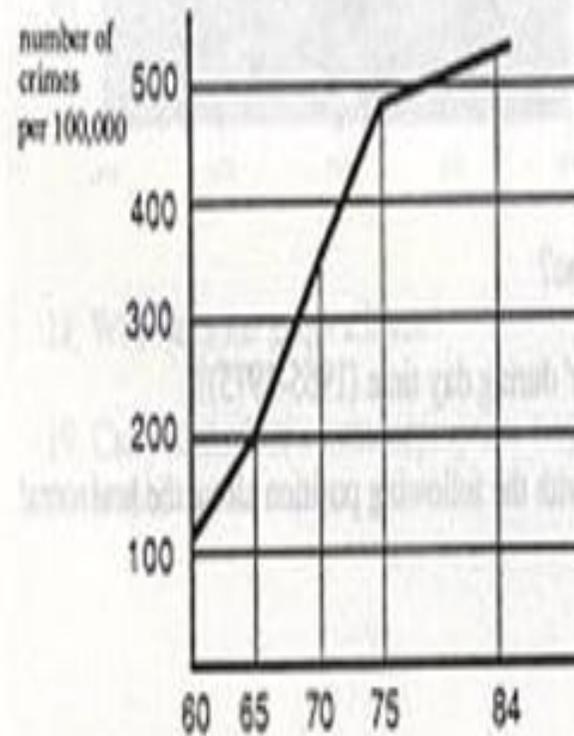
Furti in casa

Newsweek:



It shows the number of reported crimes per 100,000 inhabitants, initially every five years, later on per year.

Manufacturers of alarm-systems used the same numbers to produce the following graph:



crime triples!!!
STOP
the increase!
-BUY ALARM SYSTEMS-

Competenze inseguite da tempo...



Programmi per la
scuola
elementare 1985



“Il pensiero matematico è caratterizzato dall’attività di risoluzione di problemi”



Indicazioni
Nazionali
per il
curricolo
2007

“Caratteristica della pratica matematica è la risoluzione di problemi, che devono essere intesi come questioni autentiche e significative, legate spesso alla vita quotidiana, e non solo esercizi a carattere ripetitivo”

“Caratteristica della pratica matematica è la risoluzione di problemi, che devono essere intesi come questioni autentiche e significative, legate alla vita quotidiana, e non solo esercizi a carattere ripetitivo o quesiti ai quali si risponde semplicemente ricordando una definizione o una regola...”

Indicazioni
Nazionali
per il
curricolo
2012

Una prima conseguenza

Questioni autentiche...

Esempi Lucia Stelli



Strategia di Emma:

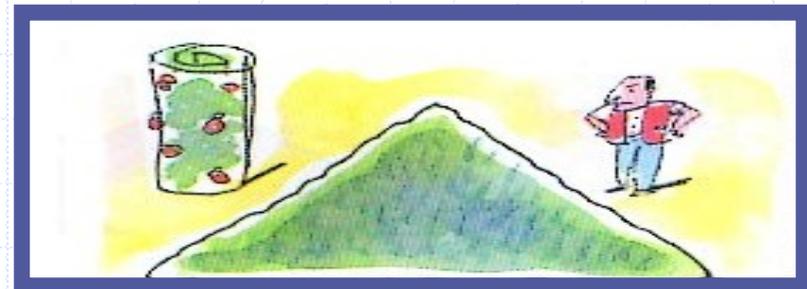
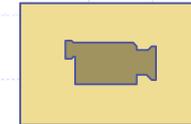
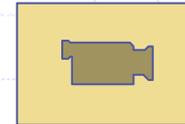
- chiamo L la somma da dare al lattaio e F la somma per il fornaio;
- la mamma ci dice che: $L = 3F$ (il lattaio deve avere il triplo);
- allora, in tutto le parti da fare sono 4, cioè 3 per il lattaio e 1 per il fornaio.

Una prima conseguenza

Questioni autentiche...

Esempi Lucia Stelli

Un agricoltore raccoglie 50 cespi di insalata; ne vende la metà a € 2 cadauno e l'altra metà diminuita di 5 unità a € 1,50 cadauno. Quanto incassa? Quanto guadagna se dovrà pagare un'imposta di € 0,25 per ogni cespo di insalata venduto? [€ 80; € 68,75]



Il signor Mario possiede un giardino avente la forma di un triangolo isoscele.

Egli sa che il lato misura 10m e la base è $\frac{3}{2}$ del lato.

Qual è il preventivo di spesa se desidera recintarlo con un'aiuola sintetica che costa 40€ al metro?

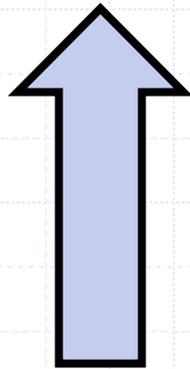
Una prima conseguenza

Questioni autentiche...

Programmi per la scuola elementare
DPR 14 giugno 1955

potrà proporre anche svariati esercizi di calcolo, pure non sostenuti da problemi. Ricordi ad ogni modo che in mancanza di meglio è preferibile far eseguire operazioni a titoli di esercizio anziché proporre problemi artificiali, astrusi, non rispondenti a realtà. In particolare, si

Possibile difficoltà
nel comprendere la
richiesta (anche il
senso della stessa)



**PROBLEMI
ETEROPOSTI**

- Se il bambino formula da sé la domanda, vengono evitati gli ostacoli riscontrati nei test di Piaget così come in molti processi risolutivi dei problemi verbali.
- Ed il fatto che la formuli da sé è reso possibile da un contesto che sia per lui significativo, in cui egli riconosca una situazione di problema.

La differenza tra riferimenti concreti e realismo/
significatività/concretezza del problema



Margaret Donaldson, criticando gli studi e le conclusioni di Piaget, propone una particolare interpretazione, legata al “dare senso”, della dicotomia **concreto/astratto**

Un problema (un compito) è “concreto” non in quanto fa riferimento ad oggetti o situazioni realistiche, ma se è vicino a “gli scopi, i sentimenti e gli sforzi umani fondamentali”



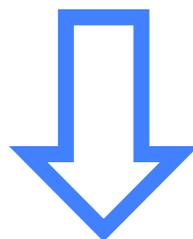


ATTENZIONE A PROMUOVERE UNA CERTA VISIONE DELLA MATEMATICA

REGOLE

TECNICHE

MEMORIA



PORSI, AFFRONTARE E RISOLVERE PROBLEMI

DA PENSIERO RIPRODUTTIVO A PRODUTTIVO



L'alunno imparerà ad **affrontare** con fiducia e determinazione **situazioni problematiche**

Di estrema importanza è lo sviluppo di un'adeguata visione della matematica, non ridotta a un insieme di regole da memorizzare e applicare, ma riconosciuta e apprezzata come contesto **per affrontare e porsi problemi significativi**

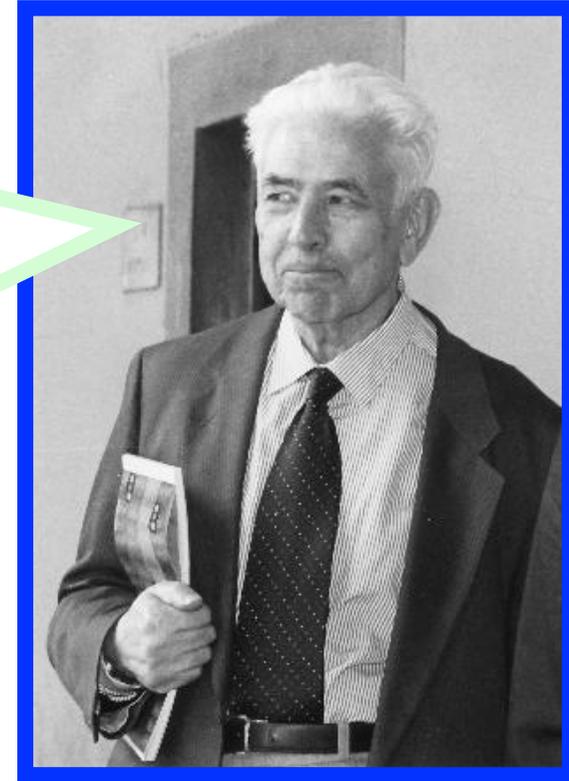
Caratteristica della pratica matematica è **la risoluzione di problemi**

PORSI, AFFRONTARE E RISOLVERE PROBLEMI

DA PENSIERO RIPRODUTTIVO A PRODUTTIVO

Il bello della matematica

“Un bel problema,
anche se non lo risolvi,
ti fa compagnia se ci
pensi
ogni tanto”



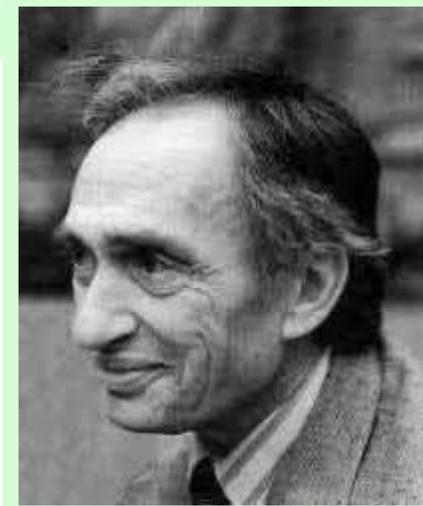
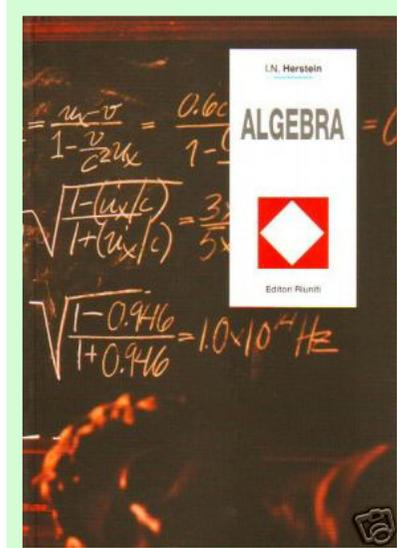
E. De Giorgi

PORSI, AFFRONTARE E RISOLVERE PROBLEMI

DA PENSIERO RIPRODUTTIVO A PRODUTTIVO

Due parole sui problemi. Ve ne sono molti, e solo un studente eccezionale potrebbe risolverli tutti. Alcuni servono solo a completare dimostrazioni del testo, altri hanno lo scopo di illustrare i risultati ottenuti e far pratica su di essi.

Molti non vengono proposti **tanto per essere risolti, quanto per essere affrontati**. Il valore di un problema non sta tanto nel trovarne la soluzione, quanto nelle idee che fa sorgere in chi la affronta e nei tentativi messi in atto”



“Quale è il modo migliore per imparare a risolvere problemi?
Affrontare problemi”

PORSI, AFFRONTARE E RISOLVERE PROBLEMI

DA PENSIERO RIPRODUTTIVO A PRODUTTIVO

Competenze difficili
da costruire

Argomentazione e problem solving

La risoluzione di problemi è una delle attività principali nell'insegnamento della matematica, ma è anche quella in cui si riscontrano le maggiori difficoltà degli allievi. In molti casi esse hanno a che fare con la comprensione del problema: l'allievo non costruisce un'adeguata rappresentazione mentale della situazione descritta oppure si sofferma su dettagli irrilevanti perdendo di vista la domanda



*I ragazzi non sanno argomentare...non
sanno risolvere i problemi*

MA....

Ci arrivano poco preparati...



PARTE II

La tradizionale attività sui
problemi e le sue
conseguenze

L'educazione matematica invece di sviluppare «la voglia di affrontare problemi nuovi» sembra alimentare, e nel corso degli anni accentuare, la paura dei problemi, la paura di sbagliare e del difficile, alimentando la paura della matematica e “l'ansia del tempo”

Gli obiettivi fissati nelle Indicazioni nazionali rappresentano dunque una vera e propria sfida!

Quali problemi si usano?

Con quali modalità?

OBIETTIVI

Valutare conoscenze e abilità

“MODALITÀ D'USO”

A casa
(in classe solo la verifica)

Poco tempo

Da soli

L'insegnante
corregge,
risponde

LA STRUTTURA MATEMATICA

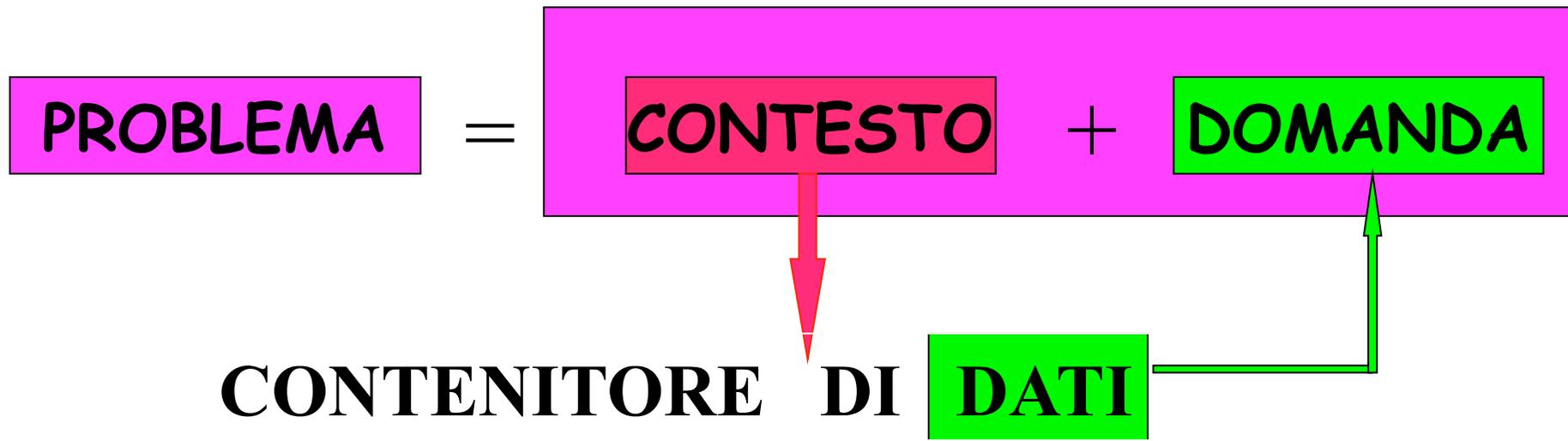
E' del tipo
“tutto o niente”

Si devono combinare con operazioni tutti e soli
i dati numerici presenti

C' è una e una sola soluzione

Si devono utilizzare
conoscenze apprese di recente

STRUTTURA DEL *PROBLEMA*



COMPORTAMENTO *VINCENTE*

PROBLEMA

CERCARE I DATI NEL TESTO

CERCARE LA PAROLA CHIAVE NELLA DOMANDA

**INDOVINARE L'OPERAZIONE ED EFFETTUARLA
PER TROVARE IL RISULTATO**

SONO PROBLEMI? QUALI DECISIONI? QUALI STRATEGIE?

UN ESEMPIO

PROBLEMA

CONTESTO

+

DOMANDA

CONTENITORE DI **DATI**

...i bambini rispondono!

Il capitano/pastore italiano

Problema: In un prato ci sono 20 pecore, 7 capre, e 2 cani. Quanti anni ha il pastore?

$$20+7+2=29$$

"Forse ad ogni compleanno gli hanno regalato un animale..."

$$20+7=27$$

"È smemorato e allora hanno cambiato animale quando è nato il figlio così può ricordarsi anche la sua"

$$70-76$$

"Ho fatto un ragionamento particolare: il pastore se ha due cani per così poche bestie uno dei due cani forse gli serve perché è non vedente.

Quindi deduco che abbia sui 70-76 anni"

Il ruolo dei libri di testo

ESERCIZI RIASSUNTIVI: problemi

RISOLUZIONE DI UN PROBLEMA

Leggi il testo e risolvi il problema.

Quest'anno della primavera, i giardinieri hanno piantato 126 gerani, 215 petunie e 94 begonie.
Quanti fiori in tutto hanno piantato?



DATI

DATI

OPERAZIONE

OPERAZIONI

Si sta veramente suggerendo di leggere al bambino? O in realtà si suggerisce una lettura selettiva del testo e un procedimento automatico e non strategico?

Il ruolo dei libri di testo

ESERCIZI RIASSUNTIVI: problemi

PROBLEMA



Strategie

Per risolvere un problema di qualsiasi tipo bisogna sempre elaborare un **piano di azione**. Nel caso del **problema di matematica** la pianificazione si compone di una serie di **operazioni concrete** e di **calcoli** che vanno messi in atto secondo una **corretta sequenza**.

- Leggi ed esegui.

Leggi il testo del problema con calma. Cerchia i **dati** e concentrati sulle **parole importanti**.

Federica compra **3 chili** di pere che costano **€ 1,80** l'uno e un sacchetto di arance che costa **€ 3,50**.
Paga con una banconota da **€ 10**.
Quanto riceverà di **resto**?

Si sta veramente suggerendo di leggere al bambino? O in realtà si suggerisce una lettura selettiva del testo e un procedimento automatico e non strategico?

Il far lavorare su problemi significativi e richiedere di argomentare è...

Un'occasione di formazione per gli allievi

Per lavorare in maniera significativa sui contenuti, per lavorare sulla fondamentale competenza argomentativa, per confrontarsi con gli altri e avere anche più strumenti per auto-valutarsi

Uno strumento per raccogliere feedback significativi sull'apprendimento dei propri allievi

Per poter intervenire in maniera mirata su eventuali difficoltà

Un'occasione di formazione per l'insegnante

minare le proprie certezze, ampliare il proprio bagaglio interpretativo

PARTE III

Ascoltare per
interpretare

Valorizzare i diversi processi

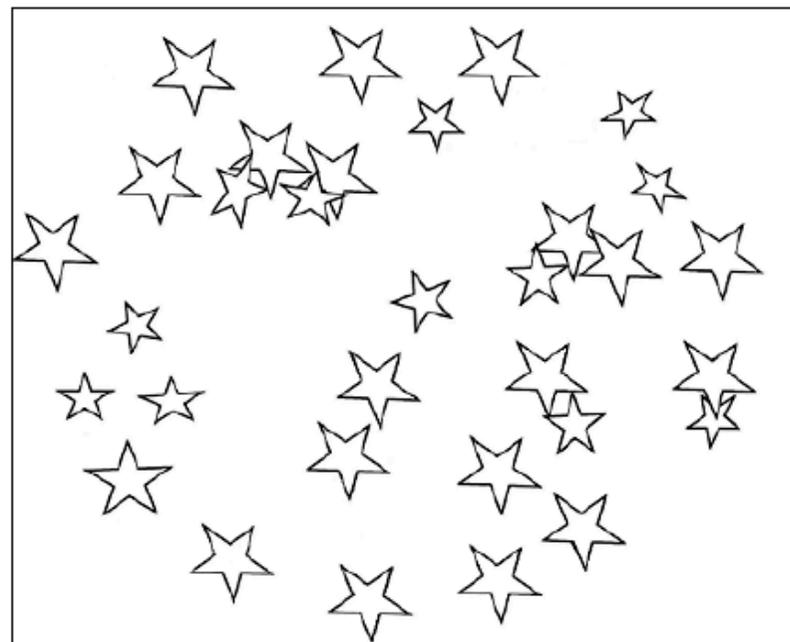
Seconda primaria
Ambito Numeri

Le difficoltà
necessarie per
spostare l'attenzione
sui processi

Risultati del campione nazionale

Item	Risposta omessa	Risposta errata	Risposta Corretta
D1	1,3	42,6	56,1

D1. Conta le stelle.



Quante sono in tutto le stelle?

Risposta:

Caratteristiche

SCOPO DELLA DOMANDA

Verificare il possesso di strategie di conteggio.

Indicazioni nazionali

Contare oggetti o eventi, a voce e mentalmente, in senso progressivo e regressivo e per salti di due, tre, ...

D1. Contare le stelle

Completo spostamento dell'attenzione dalla risposta numerica alle strategie per "contare bene": alla fine della discussione, anche animata, nessuno ha chiesto quale fosse la risposta corretta alla domanda da cui era partita la discussione stessa

Generali rispetto allo scopo della domanda: uso di strategie non efficienti, difficoltà nel conteggio

La maestra non fornisce la risposta giusta, ma rilancia:
"Come facciamo per essere sicuri di aver contato nel modo giusto?"

Molte risposte diverse!

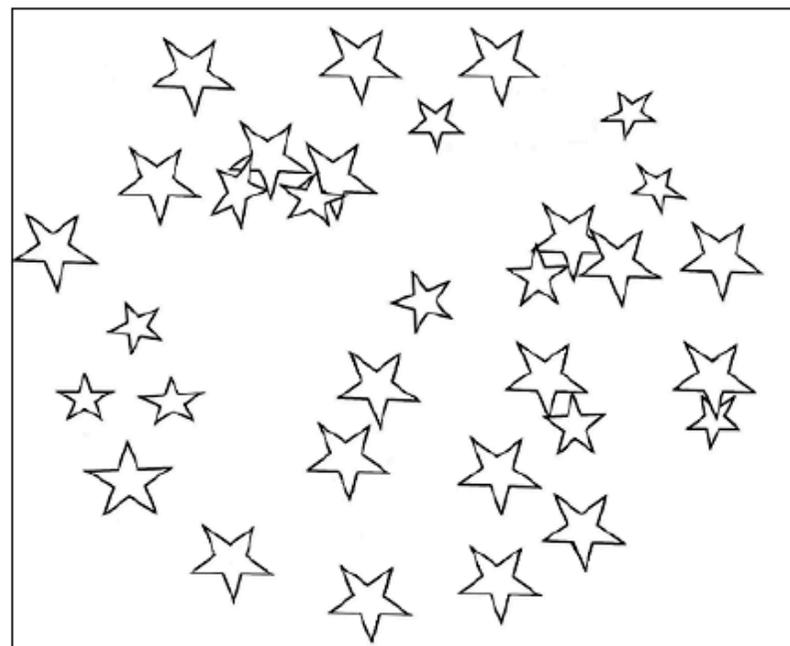
Difficoltà di almeno due tipi

Relative al **particolare** insieme di oggetti: non manipolabile, con oggetti sovrapposti e disposti in modo caotico

Si continua con le stelle
P. Maggi
I.C. Gamerra Pisa

Maestra: "Vi siete divertiti?
SI 24, NO 2
Cristian: "erano difficili
da contare perché una
sopra l'altra ed erano
sparpagliati"

D1. Conta le stelle.

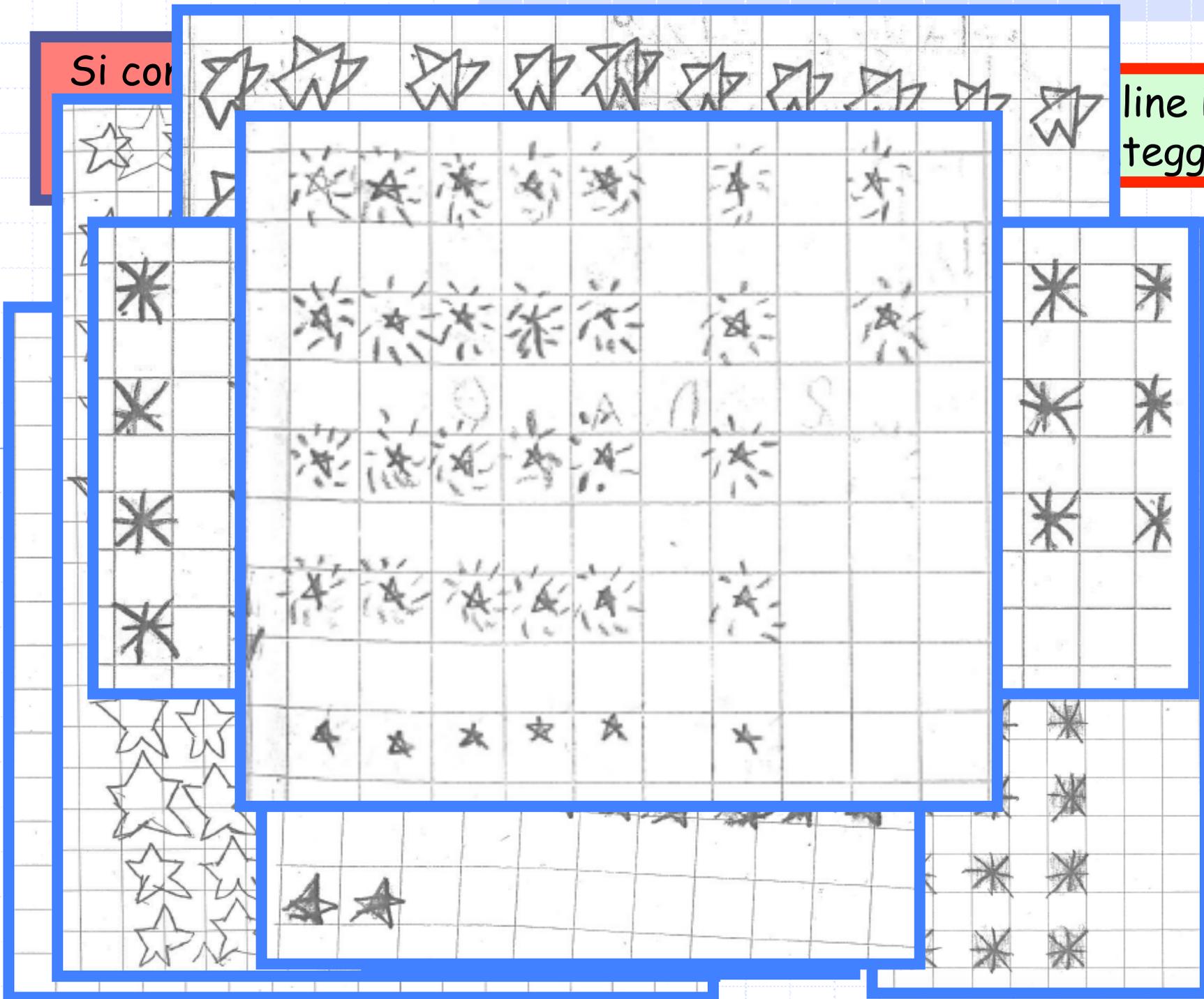


Quante sono in tutto le stelle?

Vi siete divertiti? SI 24
NO 2 Cristian: erano difficile
da contare perché una sopra l'altra e erano
sparpagliati

Si con

line in
teggio



Argomentare come strumento per l'insegnante

L'analisi di difficoltà
in verticale

Quinta primaria

D23. Quale dei seguenti numeri è più vicino a 100?

- A. 100,010
- B. 100,001
- C. 99,909
- D. 99,990

Tipicamente dato anche
in prima secondaria di
primo grado

Risultati del campione nazionale

Item	Risposta omessa	Opzioni			
		A	B	C	D
D23	1,2	3,8	43,9	6,5	44,6

Perché così tanti rispondono D? Sicuramente ci possono essere difficoltà con i decimali ma...

Importanza di chiedere il perché...l'attenzione ai processi!

Argomentare come strumento per l'insegnante

L'analisi di difficoltà
in verticale

Quinta primaria

D23. Quale dei seguenti numeri è più vicino a 100?

- A. 100,010
- B. 100,001
- C. 99,909
- D. 99,990

Tipicamente dato anche
in prima secondaria di
primo grado

Emerge una difficoltà di
“dizionario”

Molti bambini, anche bravi solutori, hanno dichiarato “*non abbiamo considerato i numeri successivi a cento*”, “*il più vicino a cento*” significa che “*non sono ancora arrivato a cento*”. Risulta che per i bambini “vicino a X” significa “prima di X, che non supera X, che lo deve ancora raggiungere”

Argomentare come strumento per l'insegnante

Molti bambini, anche bravi solutori, hanno dichiarato “*non abbiamo considerato i numeri successivi a cento*”, “*il più vicino a cento*” significa che “*non sono ancora arrivato a cento*”. Risulta che per i bambini “vicino a X” significa “prima di X, che non supera X, che lo deve ancora raggiungere”

D23. Quale dei seguenti numeri è più vicino a 100?

- A. 100,010
- B. 100,001
- C. 99,909
- D. 99,990

È stato anche chiesto agli allievi di riformulare il quesito per cercare di evitare questa difficoltà testuale e la proposta fatta dai bambini è stata la seguente

L'eventuale intervento didattico dell'insegnante sarà diverso e avrà una diversa efficacia!

“Quali di questi numeri, andando avanti e indietro sulla retta dei numeri, si avvicina di più a 100”

Argomentare come strumento per l'insegnante

D11. Una classe di 9 maschi e 10 femmine, accompagnati dalla maestra Gianna e dalla maestra Luisa, sale sul pulmino per andare in gita. Restano due posti liberi.

Quanti sono in tutto i posti a sedere per i viaggiatori sul pulmino?

A. 19

B. 21

C. 23

Indicazioni nazionali

Riesce a risolvere facili problemi in tutti gli ambiti di contenuto, mantenendo il controllo sia sul processo risolutivo, sia sui risultati.

RISULTATI DEL CAMPIONE

Item	Manc. Risp.	Opzioni		
		A	B	C
D11	3,3	43,2	36,2	17,3

Macro processo: Formulare

L'importanza del processo:
le diverse "risposte giuste"

Dal dato quantitativo
a quello qualitativo:
"spiega perché"

La lettura selettiva del testo

D11. Una classe di 9 maschi e 10 femmine, accompagnati dalla maestra Gianna e dalla maestra Luisa, sale sul pulmino per andare in gita. Restano due posti vuoti. Quanti sono in tutto i posti a sedere per i viaggiatori sul pulmino?

- A. 19
- B. 21
- C. 23

Indicazioni nazionali

Riesce a risolvere facili problemi in tutti gli ambiti di contenuto, mantenendo il controllo sia sul processo risolutivo, sia sui risultati.

RISULTATI DEL CAMPIONE

Item	Manc. Resp.	Opzioni		
		A	B	C
D11	3,3	43,2	36,2	17,3

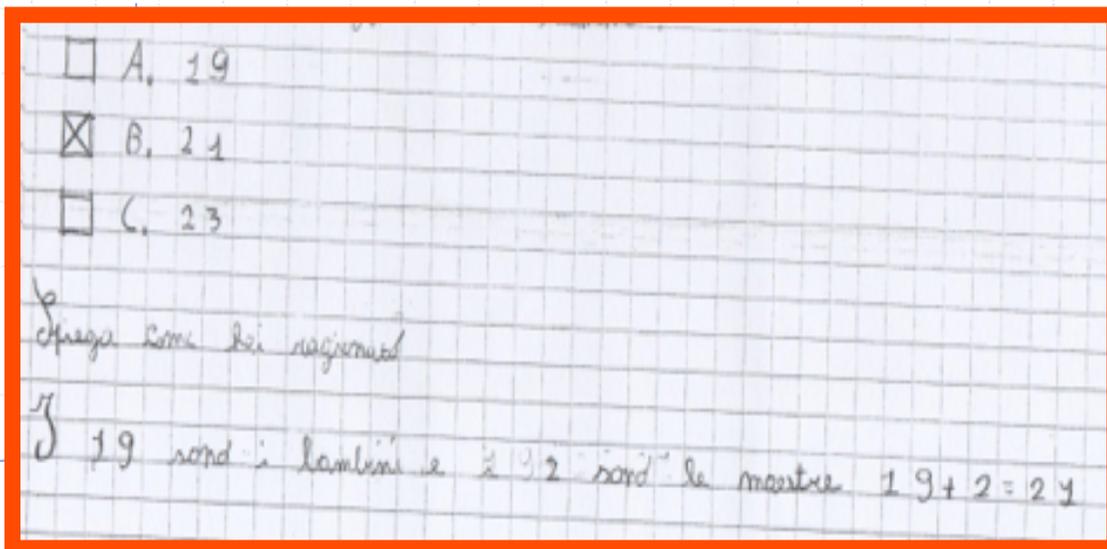
Macro processo: Formulare

Dati numerici

Parola chiave

Risposta:
 $9+10=19!$

Tanti modi di arrivare ad una risposta



Non vengono sommati i posti liberi perché i viaggiatori sono coloro che stanno viaggiando in quel momento

Indicazioni nazionali

Riesce a risolvere facili problemi in tutti gli ambiti di contenuto, mantenendo il controllo sia sul processo risolutivo, sia sui risultati.

RISULTATI DEL CAMPIONE

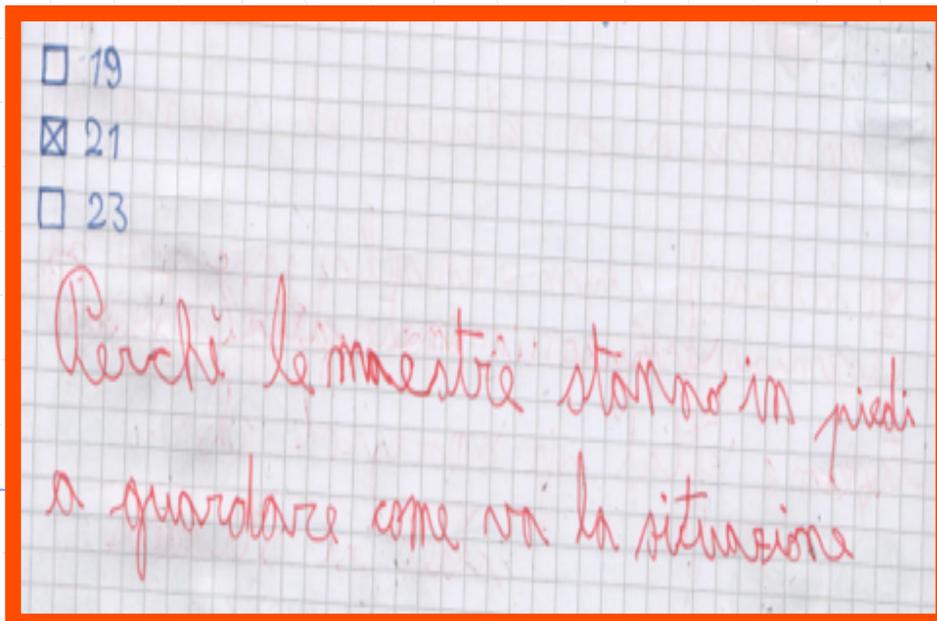
Item	Manc. Resp.	Opzioni		
		A	B	C
D11	3,3	43,2	36,2	17,3

Macro processo: Formulazione

Difficoltà sul significato di “viaggiatori”, “posti a sedere” e rapporto tra le due cose

Difficoltà a trasformare in dato numerico la informazione sulle maestre

Tanti modi di arrivare ad una risposta



...i bambini usano la loro conoscenza enciclopedica per rispondere 21 pur riuscendo benissimo a trovare tutti i dati numerici

Oppure...

Difficoltà sul significato di “viaggiatori”, “posti a sedere” e rapporto tra le due cose

Difficoltà a trasformare in dato numerico la informazione sulle maestre

Indicazioni nazionali

Riesce a risolvere facili problemi in tutti gli ambiti di contenuto, mantenendo il controllo sia sul processo risolutivo, sia sui risultati.

RISULTATI DEL CAMPIONE

Item	Manc. Resp.	Opzioni		
		A	B	C
D11	3,3	43,2	36,2	17,3

Macro processo: Formulazione

Un esempio: il problema dei camion

Camion (Livello 05 - 2016)

Il camion che vedi in figura può trasportare al massimo 10 automobili.



In fabbrica sono pronte 62 automobili da consegnare. Qual è il numero minimo di camion, come quello in figura, necessario per consegnarle tutte?

- A. 6
- B. 7
- C. 6,2
- D. 10

Ambito: Numeri

Scopo:

Dare significato a una divisione con resto.

Processo:

Risolvere problemi utilizzando strategie in ambiti diversi - numerico, geometrico, algebrico

Indicazioni nazionali:

- Traguardi: Riesce a risolvere **facili problemi [...] mantenendo il controllo sia sul processo risolutivo, sia sui risultati.**

- Obiettivi: **Eseguire la divisione con resto fra numeri naturali.**



Analisi a priori

Camion (Livello 05 - 2016)

Il camion che vedi in figura può trasportare al massimo 10 automobili.



In fabbrica sono pronte 62 automobili da consegnare. Qual è il numero minimo di camion, come quello in figura, necessario per consegnarle tutte?

- A. 6
- B. 7
- C. 6,2
- D. 10

Ambito: Numeri

Scopo:

Dare significato a una divisione con resto.

Processo:

Caratteristiche generali

1. Presenza alternative
2. Test a tempo
3. Contesto

[...] **mantenendo il controllo sia sul processo risolutivo, sia sui risultati.**

- Obiettivi: **Eeguire la divisione con resto fra numeri naturali**

Caratteristiche specifiche

1. Presenza di massimo e minimo
2. Problema di contenenza
3. Contratto didattico

Versione sperimentata 1

Camion (Livello 05 - 2016)

Il camion che vedi in figura può trasportare al massimo 10 automobili.



In fabbrica sono pronte 62 automobili da consegnare. Qual è il numero minimo di camion, come quello in figura, necessario per consegnarle tutte?

- A. 6
- B. 7
- C. 6,2
- D. 10

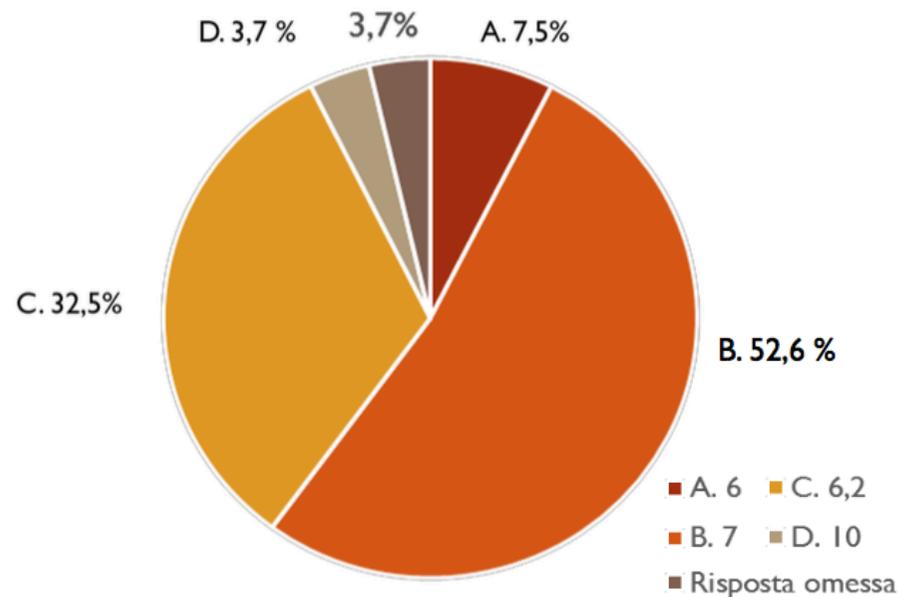
Spiega il ragionamento che hai fatto per rispondere.

Risultati migliori - ipotesi
Livello scolastico
Tempo

134 ragazzi provenienti da:

- 7 classi di livello 06
- 5 classi di livello 07
- 1 classe di livello 08

Risultati nostro campione



Resta forte attrattiva
distrattore C

L'importanza dell'argomentazione

Processi risolutivi di chi risponde 7

Tramite divisione esatta:
 $62 : 10 = 6,2$ e quindi 7

Tramite moltiplicazione
andando per prove

Altro (esclusione di
alternative, altri processi)

Non giustifica

26,9 %

52,5%

14,9%

5,7 %

Scopo:

Non considera la divisione!

Dare significato a una divisione con resto.

L'importanza dell'argomentazione

Processi risolutivi di chi non risponde 7

- **Contratto didattico**

Tensione della scelta

Vogliono vedere se so fare la divisione?

Vogliono la risposta 'realistica'?

In fabbrica sono pronte 62 automobili da consegnare.

Qual è il numero minimo di camion, come quello in figura, necessario per consegnarle tutte?

A. 6

<input checked="" type="checkbox"/>	7
<input checked="" type="checkbox"/>	6,2

D. 10

Spiega il ragionamento che hai fatto per rispondere.

All'inizio io ho fatto $62 : 10 = 6,2$ e così poi trovo il numero di camion, però poi mi sono accorto che i camion a metà non ce ne stanno. Quindi le risposte in questo problema sono 2 e sono 7 camion oppure come avevo fatto all'inizio 6,2 camion.

$$62 : 10 = 6,2 \text{ camion.}$$

62,0		10
20		6,2

Mattia (1SP)

Analisi a priori: contratto didattico

Una versione alternativa

D18. Il camion che vedi in figura può trasportare al massimo 10 automobili.



In fabbrica sono pronte 62 automobili da consegnare.
Qual è il numero minimo di camion, come quello in figura, necessario per consegnarle tutte?

Risposta: _____

139 ragazzi

Una riformulazione per testare l'incidenza di un fattore

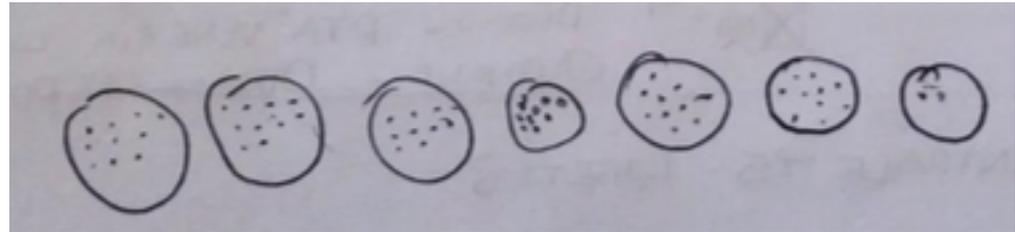
Item	Risposta omessa	Opzioni			
		6	7	6,2	ALTRO
D18-L05-2016 Campione nostra sperimentazione	4,3 %	13,7 %	67,6 %	5,8 %	8,6 %

Analisi a priori: presenza di alternative

Una versione alternativa

Maggiore varietà nei processi di chi risponde 7

Tramite divisione esatta:
 $62 : 10 = 6,2$



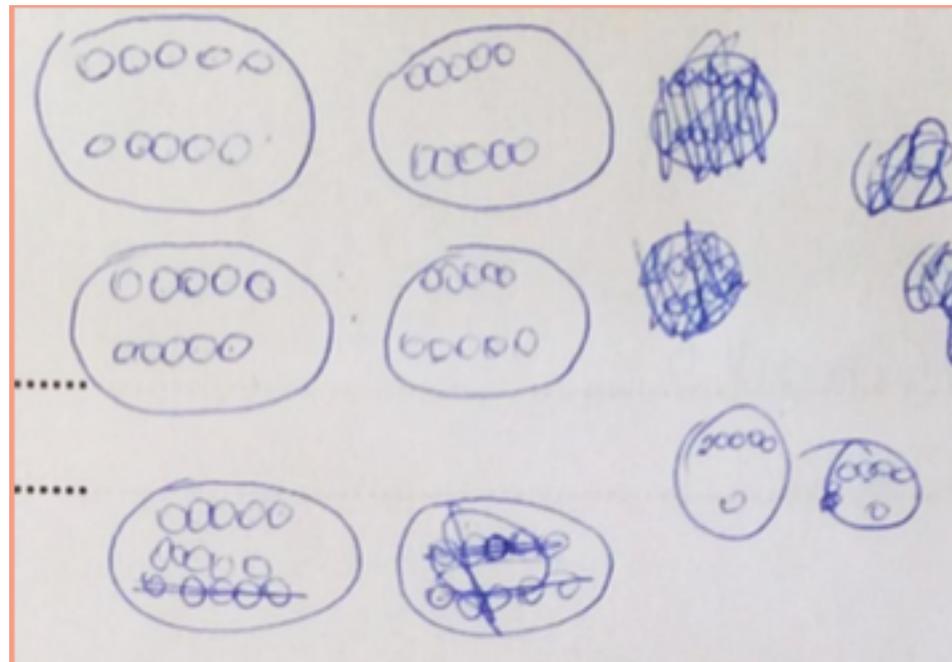
Tramite moltiplicazione
andando per prove

~~Tramite esclusione di
alternative~~

Tramite somma

Tramite diverse
rappresentazioni grafiche

Altri processi



Spiega il ragionamento che hai fatto per rispondere.

Per risolvere questo problema mi sono aiutata con dei disegni.
Un camion può portare max 10 macchine, non che ce ne devono
stare per forza 10. Quindi 5 camion ne portano 10 e gli altri
2 ne portano 6

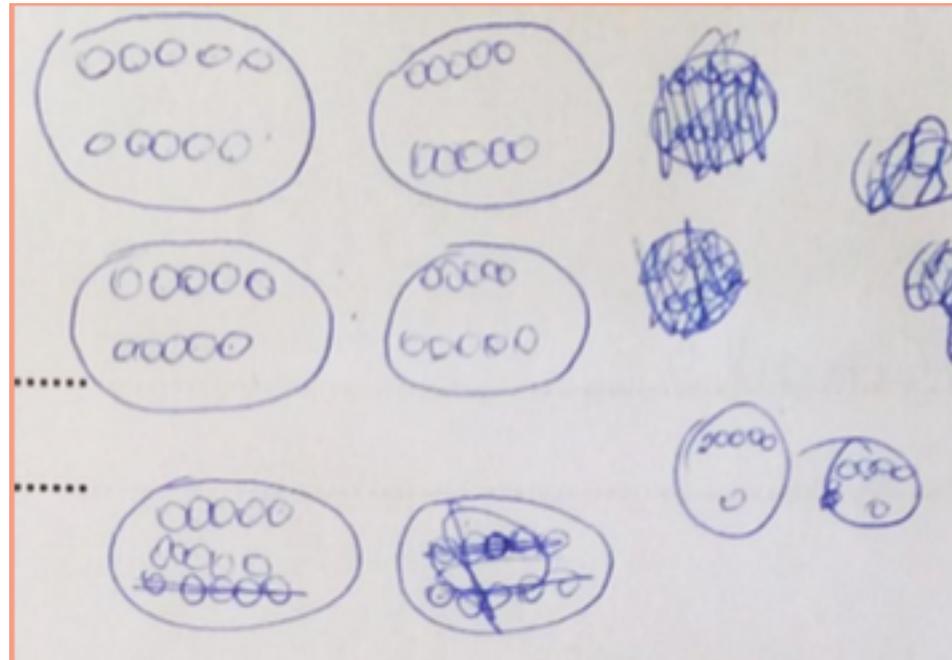
Tramite moltiplicazione
andando per prove

~~Tramite esclusione di
alternative~~

Tramite somma

Tramite diverse
rappresentazioni grafiche

Altri processi



L'inaspettato

Rilevanza dell'immagine

Uso *stenografico* della scrittura decimale

Qual è il numero minimo di camion, come quello in figura, necessario per consegnarle tutte?

- 9 A. 6
B. 7
 C. 6,2
D. 10

Spiega il ragionamento che hai fatto per rispondere.

SECONDO ME 6 CAMION PERCHÉ COSÌ ⁶ ~~6~~ CAMION
SONO PIENI E L'ULTIMO CAMION TRASPORTA SOLO
2 AUTO

Un'altra versione alternativa

Item	Risposta omessa	Opzioni			
		A. 7,6	B. 7	C. 7,75	D. 8
D18-L05-2016 Campione nostra sperimentazione	1,9%	12,4%	10,5%	33,3%	41,9%



In fabbrica sono pronte 62 automobili da consegnare.

Qual è il numero minimo di camion, come quello in figura, necessario per consegnarle tutte?

- A. 7,6
- B. 7
- C. 7,75
- D. 8

Spiega il ragionamento che hai fatto per rispondere.

Conclusioni

Importanza di prestare
attenzione ai processi

Educare all'argomentazione

Dare valore a un aspetto
fondamentale in matematica

Feedback: stessa risposta
diverse situazioni

Importanza di accettare
la complessità della
modellizzazione

Tipicamente si chiede di
modellizzare...ma senza
esagerare!

Conclusioni

Il bravo è chi si adegua...

La diversità è spesso vissuta come problematica, fastidiosa, preoccupante, in particolare in matematica

Riflettiamo sulle modalità con la quale gestiamo la diversità durante l'ora di matematica

Importanza di accettare la complessità della modellizzazione

Tipicamente si chiede di modellizzare...ma senza esagerare!

Materiale approfondimento

Quaderni commento *INVALSI*
scaricabili al seguente link:
fox.dm.unipi.it/invalsi

Progetto Percontare:
<http://percontare.asphi.it>
Materiale scaricabile dopo
iscrizione gratuita

Progetto Bambini che contano:
[http://
memoesperienze.comune.modena.it
/bambini/pagine/home.htm](http://memoesperienze.comune.modena.it/bambini/pagine/home.htm)



Pierluigi Ferrari
*Matematica e linguaggio.
Quadro teorico e idee
per la didattica*
Pitagora (2005)